(*public 2008*)

Résumé : La monnaie en euros est frappée par chacun des états européens qui ont choisi d'abandonner leur monnaie nationale, et le côté face permet de déterminer l'origine d'une pièce. Peu à peu, les pièces franchissent les frontières et se mélangent. On construit un modèle élémentaire, markovien, de ce processus d'échange. On cherche à déterminer le temps qu'il faut au système pour parvenir à “l'équilibre statistique”.

Mots clefs : Chaîne de Markov, mesure invariante.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Modèle

Les pièces de monnaie en euros sont frappées par chacun des quinze états européens de la zone “Euroland”, et le côté face permet de déterminer l'origine d'une pièce. Les quantités de pièces introduites au début de l'an 2002 étaient à peu près proportionnelles aux besoins monétaires de chacun des pays. L'Allemagne, par exemple, a fourni $32,6$ % des pièces, la France environ 15 % et le Luxembourg $0,2$ %. Au départ, chaque pays a mis en circulation sur son territoire “ses” propres euros.

Peu à peu, les pièces ont commencé à franchir les frontières et à se mélanger. Actuellement, des milliers d'Européens cherchent à comptabiliser et à garder trace des proportions de pièces issues des différents pays qui leur passent entre les mains. Plusieurs sites web permettent d'enregistrer ces données et de suivre leur évolution.

Ainsi, en page 18 de la revue *Sciences et Avenir* de janvier 2003, un court article rend compte de trois sondages de l'Institut national d'études démographiques, portant chacun sur 1 000 à 2 000 Français. En septembre 2002, environ 3 % des centimes étaient étrangers, contre environ 14 % des pièces de deux euros. Les régions frontalières sont les plus perméables (avec parfois jusqu'à 60 % de pièces étrangères !).

C'est là une situation historique unique, et l'évolution de ce processus mérite d'être étudiée statistiquement, comme sont étudiés, par exemple, les processus épidémiques, les modes de fonctionnement des réseaux de télécommunications, ou l'interdépendance mondiale des cours boursiers.

Comment modéliser ces processus d'échange ? Comment prendre en compte à la fois les distances entre pays, les différences entre régions d'un même pays, les variations des flux de voyageurs, de touristes, de frontaliers, de fourgons bancaires, l'existence de collectionneurs, l'utilisation combinée des cartes de crédit, des billets et des pièces ?

Que se passera-t-il sur le long terme ? Verrons-nous un jour s'établir une sorte de situation d'équilibre ? Si oui, de quelle nature et dans combien de temps ?

Considérons le temps comme “discret”, les instants successifs étant représentés par des entiers. Supposons d'abord que l'Europe est réduite à deux pays, A et B. Supposons aussi que le nombre de pièces d'un euro frappées par A reste constant au cours du temps, et même chose pour celles frappées par B : pas de perte, pas de production de nouvelles pièces. Supposons maintenant qu'à chaque instant, un euro présent dans A est tiré au hasard et échangé avec un autre euro tiré au hasard dans B, indépendamment du premier. Chacun de ces euros est tiré selon les proportions à cet instant de pièces frappées par A et par B dans le pays considéré. Si les deux euros tirés sont du même type (frappés par le même pays), rien ne change. Si l'euro tiré dans A a été frappé par A et que celui tiré dans B a été frappé par B, alors ce mécanisme ajoute dans A un euro frappé par B, et ôte de A un euro frappé par A ; et inversement dans B.

Cela signifie que pendant chaque unité de temps, un citoyen de A qui vient d'arriver dans B paie avec une pièce sortie de son porte-monnaie (où les proportions sont celles de A), tandis qu'un citoyen de B depuis peu en visite dans A paie avec une pièce issue de sa bourse (où les proportions sont celles de B) ; ou encore, qu'en rendant la monnaie on donne à un citoyen de A en voyage dans B une pièce issue d'un tiroir-caisse de B ; ou inversement.

2. Formulation mathématique : cas de deux pays

Précisons le mécanisme de notre modèle à deux pays. Notons N_A le nombre total d'euros frappés dans le pays A, et N_B celui du pays B. Supposons que $N_A \leq N_B$. (Sinon, on intervertit A et B.) Les instants sont notés $t = 0, 1, 2, \ldots$. À l'instant $t = 0$, tous les euros de A ont été frappés par A, et tous ceux de B frappés par B. Notons $X(t)$ le nombre d'euros frappés par A, qui sont en circulation dans le pays A à l'instant t. Les variables aléatoires $X(t)$ prennent leurs valeurs dans l'ensemble fini constitué des nombres entiers 0, 1, ..., N_A. Lorsqu'il y a deux pays seulement, l'évolution du système se ramène à celle de $X(t)$. Si à l'instant t, $X(t) = x$, alors la pièce tirée dans A sera du type “frappée par A” avec probabilité x/N_A (c'est-à-dire la proportion à l'instant t de telles pièces parmi les N_A pièces de A), et est du type “frappée par B” avec probabilité $1 - x/N_A$. Notons ρ le rapport N_A/N_B, qui est inférieur à 1. La suite $\{X(t), t \geq 0\}$ forme une chaîne de Markov. Les probabilités conditionnelles $p_{i,j}$ que $X(t+1) = j$ sachant $X(t) = i$ sont nulles lorsque la distance entre i et j est supérieure ou égale à 2.

Précisément, les probabilités de transition $p_{i,i-1}$, $p_{i,i}$ et $p_{i,i+1}$ sont données par ls formules suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(X(t+1)=i-1\,|\,X(t)=i)=\frac{i}{N_A}\left(1-\rho+\rho\frac{i}{N_A}\right), \\ \mathbb{P}(X(t+1)=i\,|\,X(t)=i)=\left(1-\frac{i}{N_A}\right)\left(1-\rho+2\rho\frac{i}{N_A}\right), \\ \mathbb{P}(X(t+1)=i+1\,|X(t)=i)=\rho\left(1-\frac{i}{N_A}\right)^2. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Dans le cas particulier où $\rho=1$ (donc $N_A=N_B$, qu'on notera dans ce cas N), la matrice de transition prend une forme plus simple :

$$\left\{\begin{array}{ll} p_{i,i-1} & =\left(\dfrac{i}{N}\right)^2, \\ p_{i,i} & =\dfrac{2i}{N}\left(1-\dfrac{i}{N}\right), \\ p_{i,i+1} & =\left(1-\dfrac{i}{N}\right)^2. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

La suite des $X(t)$ forme ce qu'on appelle une *chaîne de Markov homogène finie, irréductible* et *apériodique*. Elle admet une unique *mesure de probabilité invariante* π, définie par $\pi(0),\ldots,\pi(N_A)$. Le système est alors *ergodique* : il tend vers un régime d'*équilibre statistique* dans lequel à tout instant t, la loi de $X(t)$ serait π.

Ce modèle très simplifié a l'intérêt de nous indiquer qu'au bout d'un temps assez long, le système arrivera presque à "l'équilibre statistique".

Dans le cas $\rho=1$, la mesure de probabilité invariante est définie par

$$\pi(i)=\frac{(C_N^i)^2}{C_{2N}^N}. \tag{2.3}$$

Posons

$$\Lambda(t)\stackrel{\text{def}}{=}X(t)/N_A \quad \text{et} \quad \lambda(t)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbb{E}(\Lambda(t)). \tag{2.4}$$

Pour avoir une première idée de l'évolution de la variable aléatoire $\Lambda(t)$, qui représente la proportion de pièces de type A à l'instant t, on calculera son espérance $\lambda(t)$, qui verifie la relation de récurrence ordinaire

$$\lambda(t+1)=\lambda(t)\left(1-\frac{1+\rho}{N_A}\right)+\frac{\rho}{N_A}. \tag{2.5}$$

Elle converge vers la valeur $\lambda^\star=\rho/(1+\rho)$, ce qui représente la proportion $N_A/(N_A+N_B)$. Cette convergence se fait à vitesse géométrique de raison $q=1-(1+\rho)/N_A$.

On peut calculer aussi la variance conditionnelle de $\Lambda(t+1)-\Lambda(t)$ sachant $X(t)$. Dans le cas particulier $\rho = 1$, ceci conduit à la relation

$$\Lambda(t+1) = \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)\Lambda(t) + \frac{\sqrt{2\Lambda(t)(1-\Lambda(t))}}{N}\,\varepsilon_{t+1}\,, \tag{2.6}$$

où chaque ε_t est une variable aléatoire centrée et de variance 1. Malheureusement pour nous, les variables aléatoires ε_t ne sont pas indépendantes et de même loi (i.i.d.). [Rappelons que $\Lambda(t)$ reste dans $[0,1]$]. Après avoir effectué la translation $H(t) = \Lambda(t) - 1/2$, on se ramène, *tant que* $H(t)$ *reste assez proche de* 0, à l'approximation

$$H(t+1) \approx \left(1 - \frac{2}{N}\right)H(t) + \frac{1}{N\sqrt{2}}\,\varepsilon_{t+1}\,. \tag{2.7}$$

Bien que cela soit faux, nous allons faire une approximation supplémentaire et supposer que tant que $H(t)$ reste assez proche de 0, les ε_t sont i.i.d., avec ε_{t+1} indépendante de $H(t)$. Cette approximation donnerait en régime stationnaire un processus aléatoire à temps discret dont la loi marginale (la loi commune des $H(t)$) serait de moyenne 0 et de variance de l'ordre de $1\big/(8N)$, donc d'écart-type de l'ordre de $1\big/(2\sqrt{2N})$. En effet, notant $a = 1 - 2/N$ et $\sigma = 1\big/(N\sqrt{2})$, considérons l'équation

$$Y(t+1) = aY(t) + \sigma\varepsilon_{t+1}, \qquad t \geq 0,$$

avec des ε_t i.i.d. centrés et de variance 1, et $Y_0 = y_0$ un réel fixé. Il vient

$$Y(1) = ay_0 + \sigma\varepsilon_1\,, \quad Y(2) = a^2y_0 + \sigma\left(a\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\,, \quad \text{etc.},$$

et de manière générale,

$$Y(t) = a^t y_0 + \sigma\sum_{i=1}^{t} a^{t-i}\varepsilon_i\,. \tag{2.8}$$

Cette suite converge en loi quand $t \to \infty$ vers la variable aléatoire

$$\sigma\sum_{j=0}^{\infty} a^j\varepsilon_j\,,$$

somme d'une série de variables aléatoires qui converge p.s. et dans L^2.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

– *Modélisation.*
- Vous pourriez expliquer ce que signifie ici l'expression “équilibre statistique du système” et expliquer ce qu'il se passe lorsque ρ est voisin de 0 ou de 1.

- D'autre part, vous pourriez expliquer pourquoi le modèle proposé est peu réaliste, et quelles conséquences ont les distances entre pays, les différences entre régions d'un même pays, les variations des flux de voyageurs, de touristes, de frontaliers, de fourgons bancaires, l'existence de collectionneurs, l'utilisation combinée des cartes de crédit, des billets et des pièces.
- Si les approximations proposées dans la partie 2 sont justifiées quand N est grand, vous pourriez commenter la phrase suivante (qui concerne $H(t)$) : « cette approximation donnerait en régime stationnaire un processus aléatoire à temps discret dont la loi marginale [. . .] serait de moyenne 0 et [. . .] d'écart-type de l'ordre de $1\big/(2\sqrt{2N})$ ».
- Vous pourriez éventuellement expliquer comment mettre en équations le cas à plus de 2 pays.

– *Développements mathématiques.* Vous pourriez expliquer pourquoi dans le cas de deux pays, l'évolution du système se ramène à celle de $X(t)$, et chercher à démontrer (2.1) et (2.6). Vous pourriez expliquer pourquoi la chaîne de Markov homogène des $X(t)$ est irréductible, apériodique et admet une unique mesure de probabilité invariante, en précisant la signification de ces termes. Vous pourriez démontrer (2.5) et justifier (2.6)–(2.7), ainsi que la fin de la partie 2. Ou encore, vous pourriez approfondir (2.3).

– *Étude numérique.*

- Vous pourriez, à partir de simulations, représenter trajectoires et loi invariante, en faisant varier le rapport N_A/N_B. Que se passe-t-il quand N_A et N_B deviennent très grands ? Vous pourriez, quand $N_A = N_B$ (noté N) est grand, essayer de vérifier la phrase suivante du texte (qui concerne $H(t)$) : "Cette approximation donnerait en régime stationnaire un processus aléatoire à temps discret dont la loi marginale [. . .] serait de moyenne 0 et [. . .] d'écart-type de l'ordre de $1\big/(2\sqrt{2N})$."
- D'autre part, vous pourriez chercher directement à partir de la matrice (2.2) et pour diverses valeurs de N, comment déterminer numériquement la vitesse de convergence des puissances de (2.2) vers leur limite.
- Enfin, vous pourriez éventuellement essayer de simuler une situation avec plus de 2 pays.
- Quelles conclusions tirez-vous des investigations que *vous* avez *choisi* de mener ? Que pensez-vous des modèles étudiés ?